CARTA AO EDITOR

Sobre o Teorema de Poynting

O teorema de Poynting é bem conhecido. Partindo da potência realizada por unidade de volume pelo campo elétrico, chega-se à equação de balanço da energia, identificando-se o fluxo de energia como o vetor de Poynting. Usualmente o Teorema é deduzido tendo como objetivo a aplicação a meios materiais e identifica-se a potência realizada por unidade de volume como o efeito Joule [1]. Queremos aqui chamar a atenção para o fato de que, com isso, omite-se outra contribuição legítima à potência realizada pelo campo elétrico $\vec{E}$: é a potência necessária para criar a polarização do meio. Esta é igual à $\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{P}}{\partial t}$, sendo $\vec{P}$ a polarização e t o tempo. De fato, as demonstrações consideram como potência realizada por unidade de volume unicamente o termo ohmico, $\vec{J}\cdot\vec{E}$, sendo $\vec{J}$ a densidade de corrente de condução. Podemos nos convencer da necessidade de se introduzir este termo devido à criação da polarização (deverá ocorrer outro devido à magnetização), lembrando que no tratamento termodinâmico da polarização [2], está claramente estabelecido que o trabalho realizado pelo campo é $\vec{E}\cdot d\vec{D}/4\pi$, com $\vec{D}$ o deslocamento elétrico. Sendo $\vec{D}=\vec{E}+4\pi\vec{P}$, resulta para aquele trabalho, $\vec{E}\cdot d\vec{E}/4\pi+\vec{E}\cdot d\vec{P}$. O primeiro termo é o trabalho para aumentar o campo no vácuo, e é uma diferencial exata. O outro depende das características do material e de variáveis termodinâmicas. No caso da magnetização, o trabalho é $\vec{H}\cdot d\vec{B}/4\pi$, igual a $\vec{H}\cdot d\vec{H}/4\pi+\vec{H}\cdot d\vec{M}$, sendo $\vec{B}$, $\vec{H}$ e $\vec{M}$, respectivamente, a indução, o campo magnético e a magnetização. A consideração desses termos nas potências realizadas por unidade de volume pelo campos elétrico e magnético no teorema de Poynting não leva a mudanças algébricas radicais na sua dedução, como veremos a seguir.

Como usualmente apresentado [1,2], o teorema de Poynting consiste em substituir no produto $\vec{J}\cdot\vec{E}$, $\vec{J}$ por seu valor extraido da equação de Maxwell, $\nabla\times\vec{H}=(1/c)(4\pi\vec{J}+\partial\vec{D}/\partial t)$, e usar a identidade da divergência do produto vetorial, $\nabla\cdot(\vec{E}\times\vec{H})=\vec{H}\cdot\nabla\times\vec{E}-\vec{E}\cdot\nabla\times\vec{H}$, com $\nabla\times\vec{E}=-(1/c)\partial\vec{B}/\partial t$. Integrando-se o resultado num volume fechado V, limitado pela superfície S, de versor normal $\hat{n}$, resulta

$$-\int_V\vec{J}\cdot\vec{E}dV=\frac{1}{4\pi}\int_V(\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}+\vec{H}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t})dV+\frac{c}{4\pi}\int_S\vec{E}\times\vec{H}\cdot\hat{n}dS. \tag{1}$$

$\vec{D}$ e $\vec{B}$ são agora expressos, respectivamente, em termos de $\vec{E}$ e $\vec{P}$, e de $\vec{H}$ e $\vec{M}$, e, transpondo para o lado esquerdo da Eq. (1) os termos em $\vec{E}\cdot\partial\vec{P}/\partial t$ e $\vec{H}\cdot\partial\vec{M}/\partial t$, chega-se a

$$-\int_V[\vec{J}\cdot\vec{E}+\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{P}}{\partial t}+\vec{H}\cdot\frac{\partial\vec{M}}{\partial t}]dV=\int_V\frac{\partial u_0}{\partial t}dV+\frac{c}{4\pi}\int_S\vec{E}\times\vec{H}\cdot\hat{n}dS \tag{2}$$

em que u_0 é a densidade de energia eletromagnética no vácuo

$$u_0=\frac{1}{8\pi}(\vec{E}^2+\vec{H}^2) \tag{3}$$

ou, re-escrevendo a Eq. (2),

$$-\int_V[\vec{J}\cdot\vec{E}+\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{P}}{\partial t}+\vec{H}\cdot\frac{\partial\vec{M}}{\partial t}]dV-\frac{c}{4\pi}\int_S\vec{E}\times\vec{H}\cdot\hat{n}dS=\int_V\frac{\partial u_0}{\partial t}dV. \tag{4}$$

Começando no lado direito da Eq. (4), temos que a perda temporal da energia puramente eletromagnética no volume V é igual à soma da potência realizada pelos campos elétrico e magnético no volume V e do fluxo de energia puramente eletromagnética que flui para o exterior do volume (fluxo do vetor de Poynting).

Note-se que no presente tratamento não foi necessário admitir que o meio é linear, isto é, que as polarizações e magnetizações são, localmente, proporcionais aos respectivos campos.

O nosso tratamento foi feito no sistema Gaussiano. No sistema Internacional, as Eqs. (3) e (4) se escrevem

$$u_0 = \frac{1}{2}(\epsilon_0 \vec{E}^2 + \mu_0 \vec{H}^2), \tag{5}$$

$$-\int_V [\vec{J}\cdot\vec{E} + \vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{P}}{\partial t} + \vec{H}\cdot\frac{\partial\vec{M}}{\partial t}]dV - \int_S \vec{E}\times\vec{H}\cdot\hat{n}dS = \int_V \frac{\partial u_0}{\partial t}dV, \tag{6}$$

sendo ϵ_0 e μ_0 a permitividade elétrica e a permeabilidade magnética do vácuo, respectivamente.

Enquanto que, nos meios materiais, o termo $\vec{J}\cdot\vec{E}$, como calor Joule, representa um processo irreversível, nada se pode dizer a respeito dos termos elétrico e magnético no integrando do lado esquerdo da Eq. (6), até que o processo seja especificado. Se este, no seu desenvolvimento temporal, envolve histerese elétrica ou magnética, haverá produção de calor, e adicional contribuição à irreversibilidade.

1. J. D. Jackson, , *Classical Electrodynamics,* Wiley, N. York.,1975, 2a. edição, Cap. 6.
2. M. Abraham and R. Becker, *Classical Theory of Electricity and Magnetism,* Blackie and Sons, 1952, part IV.

G. F. Leal Ferreira
Instituto de Física de São Carlos, USP